Vorlesung 2a

Diskret uniform verteilte Zufallsvariable

Teil 2: Rein zufällige Teilmenge einer festen Größe

(Buch S. 9-10)

1. Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\{1,\ldots,n\}$: der Binomialkoeffizient.

Sei $k \leq n$.

Jetzt sei S

die Menge aller k-elementigen Teilmengen von $\{1,\ldots,n\}$.

Wieviele k-elementige Teilmengen von $\{1,\ldots,n\}$ gibt es?

Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus n Personen

ein k-köpfiges Komitee ohne Reihung zu bilden?

Wird “nach der Reihe” ausgewählt, dann gibt es

$n(n-1)\cdots(n-(k-1))$ mögliche Wahlprotokolle.

Auf die Reihenfolge kommt es am Ende nicht an,

somit führen jeweils $k!$ dieser Wahlprotokolle

auf dieselbe k-elementige Teilmenge.

Also:

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$$

Binomialkoeffizient „ n über k “

die Anzahl der Möglichkeiten für „ k aus n “

Beispiel: Binomischer Lehrsatz:

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n-\text{mal}} = ?$$

Multipliziert man aus, dann ergeben sich 2^n Summanden

(entsprechend den 2^n $x\,y$-Folgen der Länge n).

Jeder dieser Summanden ist von der Form $x^k y^{n-k}$.

Für festes k gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten,

k aus den n Faktoren $(x+y)$ auszuwählen,

bei denen x zum Zug kommt.

Also $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

$\binom{n}{k}$ ... die Anzahl der Möglichkeiten für „ k aus n “

Rekursion: $$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Rekursion: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Interpretation: Anzahl der Möglichkeiten,

aus n Hessen und einem Bayern

ein $k+1$ köpfiges Komitee auszuwählen.

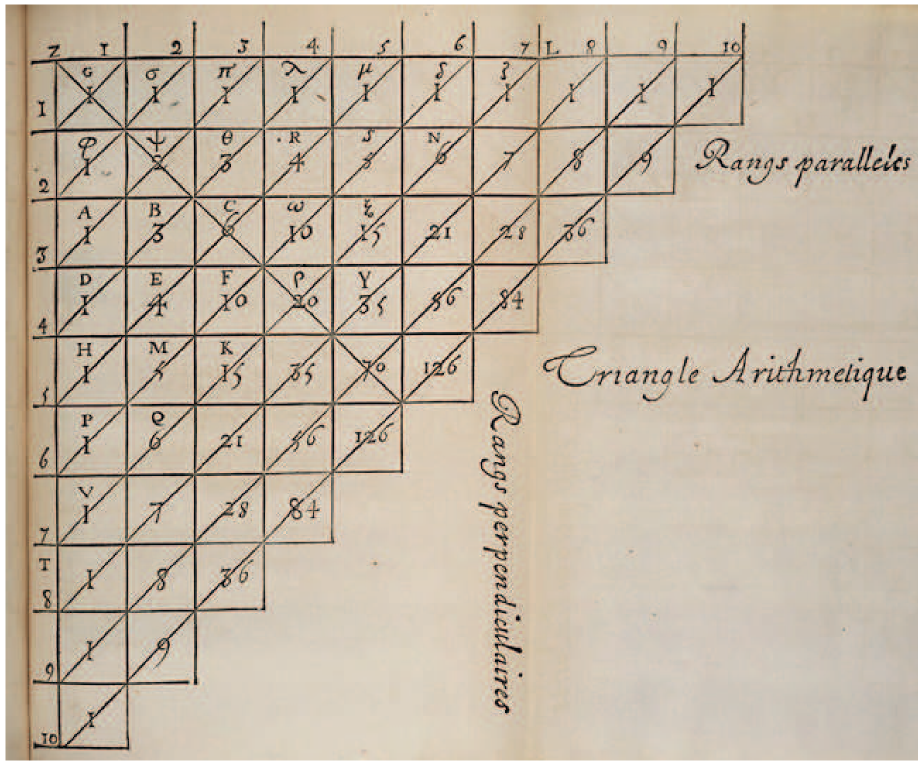
Entweder der Bayer ist im Komitee...

oder er ist nicht im Komitee...

Pascal’sches Dreieck

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Rekursion: $$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$



“La nombre de chaque cellule est égal a celui de la cellule
qui la précède dans son rang perpendiculaire,
plus à celui de la cellule qui la précède dans son rang parallèle.”
(Pascal 1654)

2. Rein zufällige Teilmengen

Sei $0 \leq k \leq n$

und sei Y eine rein zufällige k-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$.

Wie wahrscheinlich ist das Ereignis $\{Y = \{1, \ldots, k\}\}$?

Der Zielbereich von Y ist

$$S := \{t : t \subset \{1, \dots, n\},\ \#t = k\}\ ,$$

die Menge der k-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$.

Wir haben gesehen:

$$\#S = \binom{n}{k}$$

Fazit:

$$\mathbf{P}(Y = \{1, \dots, k\}) = \frac{1}{\binom{n}{k}}\ .$$

3. Ein Zusammenhang mit rein zufälligen Permutationen

Wie bekommt man eine rein zufällige k-elementige Teilmenge aus einer rein zufälligen Permutation?

Fakt (für $k \leq n$):

Ist $X = (X_1, \ldots, X_n)$

eine rein zufälligen Permutation von $1, \ldots, n$,

dann ist $\{X_1, \ldots, X_k\}$

eine rein zufällige k-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$.

Anders gesagt:

Beim Ziehen ohne Zurücklegen

führen die ersten k Züge auf eine

rein zufällige Teilmenge des anfänglichen Reservoirs.

Noch eine Möglichkeit zum Erzeugen

einer rein zufälligen k-elementigen Teilmenge:

Ziehe sukzessive ohne Zurücklegen aus einer Urne

mit k roten und $n - k$ blauen Kugeln.

Notiere die Nummern $X_1, \ldots, X_k$ der Züge,

bei denen eine rote Kugel gezogen wird.

Dann ist $\{X_1, \ldots, X_k\}$

eine rein zufällige k-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$.